Composizione di funzioni

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

X, Y, Z insiemi , f, g funzioni

$$g \circ f : X \to Z$$

Per applicazioni lineari . V, W, U spazi vettoriali

$$V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{S} U$$

$T : V \to W$ applic. lineare

$S : W \to U$ applic lineare

Consideriamo

$$S \circ T : V \to U$$

Proposizione $S \circ T$ è applicazione lineare.

Dim

Dobbiamo verificare che.

① $S \circ T (v_1 + v_2) = S \circ T (v_1) + S \circ T (v_2)$

② $S \circ T (\lambda v) = \lambda \, S \circ T (v)$

$\forall v_1, v_2, v \in V$

Verifichiamo ①

$$S \circ T(v_1+v_2) = S\big(T(v_1+v_2)\big)$$

$$= S\big(T(v_1)+T(v_2)\big) = S(T(v_1)) + S(T(v_2))$$

per la linearità della T

per la linearità della S

$$= S \circ T(v_1) + S \circ T(v_2)$$

Ricordiamo che

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

se fisso in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ le basi standard posso associare alla T una matrice

$$\begin{array}{cccc} \left(\begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right. & \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} & \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} & \left. \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right) \\ & \uparrow & & \\ & T(e_1) & T(e_2) & T(e_n) \end{array}$$

Esempio $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

tale che $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\15\end{pmatrix}$

associo a T la matrice.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 15 \end{pmatrix}$$

Questa matrice serve perché se voglio per esempio sapere quanto vale

$$T\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -36 \end{pmatrix}$$

Più in generale se ho $T: V \to W$ applicazione lineare, e fisso una base $e_1, , e_n$ in V e una base $\epsilon_1, , \epsilon_m$ in W posso associare a T la seguente matrice $m \times n$

m righe, n colonne

$$[T]^{e_1 \; e_n}_{\epsilon_1 \; \epsilon_m} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ | & | & & | \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} T(e_1) & T(e_2) & & T(e_n) \end{array}$$

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}_{\epsilon_1, , \epsilon_m}$$

cioè se $T(e_1) = \alpha_1 \epsilon_1 + \quad + \alpha_m \epsilon_m$

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \\ \\ \alpha_m \end{pmatrix}_{\epsilon_1, , \epsilon_m}$$

Teorema (estende il corollario 5.3.4 del libro)

Sia $T : V \to W$ lineare

sia $S : W \to U$ lineare.

sia $e_1, , e_n$ base di V

sia $w_1, , w_m$ base di W

sia $v_1, , v_k$ base di U

allora

$$[S \circ T]^{e_1 \; e_n}_{v_1 \; v_k} = [S]^{w_1 \; w_m}_{v_1 \; v_k} [T]^{e_1 \; e_n}_{w_1 \; w_m}$$

prodotto fra matrici

<u>Def</u> Sia $L : V \to W$ applicazione lineare. Se L è bigettiva, L si chiama <u>isomorfismo</u>.

Oss Sia $L: V \to W$ ISOMORFISMO

L è INIETTIVA $\iff \mathrm{Ker}\, L = \{0\}$

L è SURGETTIVA $\iff \mathrm{Im}\, L = W$

Allora il teorema della dimensione dice:

$$\dim \mathrm{Ker}\, L + \dim \mathrm{Im}\, L = \dim V$$

che nel nostro caso diventa

$$0 + \dim W = \dim V$$

Ossia $\dim V = \dim W$.

Viceversa se ho due spazi della stessa dimensione V e W posso costruire un isomorfismo $T: V \to W$

Fisso una base in V $e_1, , e_n$

" " " " W $w_1, , w_n$

e pongo $T(e_1) = w_1$

$T(e_2) = w_2$

$T(e_n) = w_n$

T è ISOMORFISMO. Infatti:

Noto subito che $\operatorname{Im} T$ contiene la base $w_1, , w_n$ dunque $\operatorname{Im} T = W$

Il teorema della dimensione.

$$\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V$$

nel nostro caso diventa.

$\dim \operatorname{Ker} T + n = n$

ossia $\dim \operatorname{Ker} T = 0$ ossia $\operatorname{Ker} T = \{0\}$

ossia T è iniettiva. $\square$

Esercizio

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ t.c.

$$[T]_{st}^{st} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ t.c.

$$[S]_{st}^{st} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare $[S \circ T]_{st}^{st}$

Svolgimento.

So che $[S\circ T]^{st}_{st} = [S]^{st}_{st}\cdot[T]^{st}_{st}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & 0 \\ \hline 9 & 8 & 1 \end{array}\right)$$

L'INVERSA DI UNA APPLICAZIONE LINEARE

Sia $T: V \to V$ ISOMORFISMO

cioè è lineare e bigettiva.

Esiste allora la funzione inversa. T^{-1}

Due domande: (1) T^{-1} è lineare?

(2) Se sì, come posso ricavare

$$[T^{-1}]^{e_1 \, e_n}_{e_1 \, e_n}$$ dalla

$$[T]^{e_1 \, e_n}_{e_1 \, e_n} \; ?$$

dove $e_1, \, , e_n$ è base di V.

RISPONDEREMO A QUESTE DOMANDE DOPO PASQUA.

Esercizi su nucleo e immagine

Sia $L_K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice

$$[L_K]_{st}^{st} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+K \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -K \end{pmatrix}$$

Trovare per ogni valore di $K \in \mathbb{R}$, una base di $\operatorname{Ker} L_K$ e una base di $\operatorname{Im} L_K$.

<u>Svolgimento</u>

Calcoliamo $\operatorname{Ker} L_K$, ossia risolviamo il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+K \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

FACCIO MOSSE DI RIGA

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+k \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1+k \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+k \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

"DISCUSSIONE"

se $K = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

due variabili libere

y libera

z libera

$$x + y + z = 0$$

$$x = -y - z$$

$$\operatorname{Ker} L_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathcal{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

questa è la base cercata di $\ker L_0$

Per il teorema della dimensione so che $\dim \mathrm{Im}\, L_0$ è 1

Per dare una base di $\mathrm{Im}\, L_0$

TORNO ALLA

MATRICE INIZIALE di L_0

e scelgo una sua qualunque colonna

$$\operatorname{Im} L_0 = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right)$$

base cercata

sia ora invece $k \neq 0$

Riparto dalla matrice ridotta per righe

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

questa volta ho due pivot.

C'è una sola variabile libera dunque il $\operatorname{Ker} L_k$ ha dimensione 1.

Vedo "a occhio" che $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} L_k$

Dunque $\operatorname{Ker} L_k = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

questa è la base cercata di $\operatorname{Ker} L_k$.

Cerco adesso base di $\text{Im}\, L_K$

TORNO ALLA MATRICE INIZIALE

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+K \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -K \end{pmatrix}$$ e su questa

faccio mosse di colonna.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & K \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2K \\ 0 & 0 & -K \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2k & 0 \\ 0 & -k & 0 \end{pmatrix}$$

ho due PIVOT perché $k \neq 0$

Dunque

$$\operatorname{Im} L_k = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2k \\ -k \end{pmatrix} \right)$$

questa è la base cercata di $\operatorname{Im} L_k$

L'esercizio è finito.

Però......... ci sarebbe anche un altro modo per dare una base di $\operatorname{Im} L_k$.

Nella riduzione a scalini per righe che avevamo fatto per trovare il $\operatorname{Ker} L_k$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i pivot erano in prima e terza colonna. Allora se prendo la prima e la terza colonna DELLA MATRICE INIZIALE queste sono una base di $\mathrm{Im}\, L_k$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+k \\ 2 \\ -k \end{pmatrix}.$$

Spiegheremo domani come mai funziona.